

Damian KOLNY\*, Piotr KAMIŃSKI\*\*, Robert DROBINA\*\*\*



## WYZNACZANIE MODELU PROBABILISTYCZNEGO CZASU TRWANIA OPERACJI TECHNOLOGICZNEJ CIĄNIENIA PRĘTÓW NA PRZYKŁADZIE BRANŻY METALURGICZNEJ

### Streszczenie

*Artykuł powstał w ramach współpracy z „Walcownią Metali Dziedzice S.A.” i w oparciu o analizę stanu faktycznego przedsiębiorstwa. Przedmiotem analizy jest proces ciągnięcia prętów, który stanowi wąskie gardło w procesie technologicznym wytwarzania prętów. Opracowano model probabilistyczny, dzięki któremu nastąpiło pełniejsze zobrazowanie zachodzących zjawisk, a także charakterystyk czasowych analizowanego procesu.*

### 8.1. WPROWADZENIE

Efektywny proces identyfikowania i weryfikacji zdolności produkcyjnych wymaga szczegółowej wiedzy na temat przebiegu czynności wykonywanych przez pracownika na danym stanowisku produkcyjnym. Pomiar czasów trwania danych operacji technologicznych stanowi niezbędne dane wejściowe do przeprowadzenia modelu symulacyjnego. Zebrane informacje obrazują jak wyglądał prowadzony proces technologiczny w przeszłości i na ich podstawie można wywnioskować jak proces będzie przebiegał w przyszłości. Niezbędna okazuje się jednak weryfikacja, czy warunki pracy zmieniły się czy nie od momentu zbierania danych historycznych. Jeżeli dane produkcyjne się zmieniły w istotny sposób, zniekształcą wyniki symulacji w stanie przyszłym, a dane takie okażą się nieużyteczne. Pozyskując dane wejściowe do modelu symulacyjnego należy posłużyć się jedną z metod normowania czasu pracy szczegółowo opisane w pracach [29]. Normowanie polega na ustaleniu i oszacowaniu, jaki czas jest potrzebny pracownikowi na wykonanie konkretnego zadania produkcyjnego, przy

---

\* mgr inż., Uniwersytet Bielsko-Bialski, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Inżynierii Produkcji, [dkolny@ubb.edu.pl](mailto:dkolny@ubb.edu.pl)

\*\* dr inż., Uniwersytet Bielsko-Bialski, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, [pkaminski@ubb.edu.pl](mailto:pkaminski@ubb.edu.pl)

\*\*\* dr hab. inż., prof. UBB, Uniwersytet Bielsko-Bialski, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Katedra Inżynierii Produkcji, [rdrobina@ubb.edu.pl](mailto:rdrobina@ubb.edu.pl)

określonym stopniu szczegółowości w określonych warunkach pracy. Zebrane szeregi czasowe należy poddać analizie statystycznej, aby dobrać model probabilistyczny najlepiej odzwierciedlający rzeczywiste warunki panujące na stanowisku pracy.

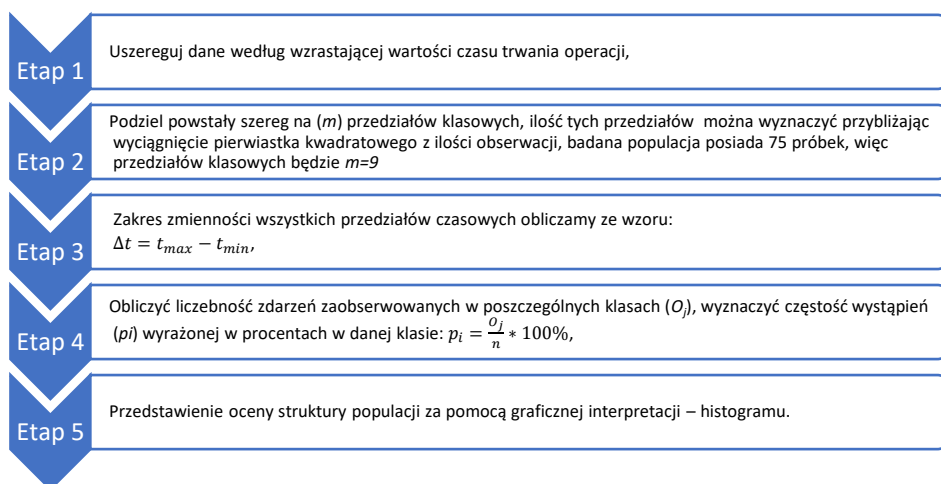
## 8.2. ANALIZA CZASU TRWANIA OPERACJI PROCESU TECHNOLOGICZNEGO PRZY WYKORZYSTANIU METOD STATYCZNYCH NA PRZYKŁADZIE OPERACJI CIĄNIENIA

Dokonano pomiaru czasu trwania operacji ciągnięcia w warunkach przemysłowych. Wykonano 75 pomiarów czasu trwania tej operacji wyniki zestawiono na (rys. 8.1.). Zgromadzone podczas badań eksperymentalnych dane zostały usystematyzowane i przeanalizowane pod kątem wyznaczenia i odrzucenia wątpliwych danych. Wykorzystano w tym celu kryterium Grubbsa [40], przy przyjęciu poziomu istotności  $\alpha=0,05$  otrzymano zbiór danych czasu trwania poszczególnych operacji.



Rys. 8.1. Wykres zmienności czasu trwania operacji ciągnięcia [18]

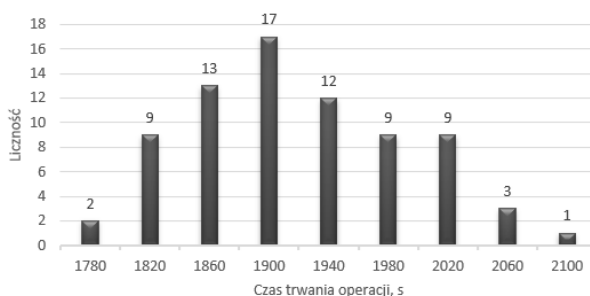
Przedstawione na (rys. 8.1.) wykres reprezentuje tradycyjny sposób zapisu i analizy wyników oceny czasu trwania operacji. Analizując wykres można stwierdzić, że charakterystyka czasu trwania poszczególnych operacji kształtuje się w sposób zróżnicowany. Dlatego w celu dalszej analizy danych należy opracować histogram czasu trwania tej operacji technologicznej. W realizacji tego celu posłużono się procedurą przedstawioną na (rys. 8.2.).



Rys. 8.2. Etapy realizacji powstawania histogramu [1, 3, 32, 39, 42]

Według przedstawionej na (rys. 8.2.) procedury dokonano wyznaczenia histogramu czasu trwania operacji technologicznej ciągnięcia. Zakres zmienności czasów przyporządkowanych do danego przedziału zestawiono (rys. 8.3, a), natomiast jej graficzną reprezentację w postaci histogramu przedstawiono na (rys. 8.3, b).

lp.	Przedział, s		Zdarzenia zaobserwowane $O_i$	Częstość (pi)
I	1740	1780	2	3%
II	1780	1820	9	12%
III	1820	1860	13	17%
IV	1860	1900	17	23%
V	1900	1940	12	16%
VI	1940	1980	9	12%
VII	1980	2020	9	12%
VIII	2020	2060	3	4%
IX	2060	2100	1	1%
suma			75	100%



a)

b)

Rys. 8.3. Zakres zmienności czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej  $\emptyset 32$  a) wraz z jej graficzną reprezentacją za pomocą histogramu b) [18]

Analizując przebieg zmienności czasu trwania operacji zawartych na (rys. 8.3.) można stwierdzić, że przedział wartości cechy najczęściej występujący czasu trwania tej operacji kształtuje się między III, IV, a V przedziałem. Fakt ten jest potwierdzony największą liczebnością zdarzeń zaobserwowanych i wynoszącą 42 co stanowi 56% populacji dla tej operacji. Większość obserwacji koncentruje się w lewej części rozkładu co świadczy o jego asymetryczności. Przedstawiony rozkład zostanie poddany dokładniejszej analizie w dalszej części pod kątem wyznaczenia modelu probabilistycznego odzwierciedlającego zachowanie się wyznaczanej cechy operacji technologicznej ciągnięcia prętów powyżej  $\emptyset 32$ .

### 8.3. DOBÓR MODELU PROBABILISTYCZNEGO DO OCENY CZASU TRWANIA OPERACJI CIĄNIENIA PRĘTÓW

Cechą charakterystyczną czasu trwania operacji ciągnięcia w warunkach przemysłowych jest ich wybitnie losowy charakter. Tak wyznaczony histogram umożliwia realizację dalszego planu badań polegającego na dopasowaniu konkretnego typu rozkładu dla danego modelu statystycznego. Aby określić parametry dopasowanego rozkładu należy oszacować parametry danego rozkładu badanej cechy populacji:

- poszukując średnią wartość cechy metodą estymacji punktowej,
- szacując wariancję lub odchylenie standardowe.

Tworząc model symulacyjny danego procesu produkcyjnego w środowisku komputerowym należy uwzględnić zmienność czasu trwania poszczególnych operacji. Dokonuje się tego tworząc ciąg danych, będących odzwierciedleniem procesu stochastycznego, wynikającego z czasu trwania danej operacji. Proces ten można

potraktować jako funkcję losową. Mając do czynienia z tak zdefiniowanym szeregiem czasowym, wynikającym z procesu stochastycznego będącym rodziną zmiennych losowych  $X_t$  należącej do przestrzeni zdarzeń losowych  $\Omega$  tzw. indeksów procesu. Poszczególne wartości zmiennej losowej  $x_t$  odnosi się do stanu procesu stochastycznego w konkretnej chwili  $t$ . Zbiór wszystkich zmiennych losowych  $x_t$  należy do przestrzeni zdarzeń losowych  $\Omega$  [9, 11].

Wyróżnić można procesy deterministyczne i niedeterministyczne. W procesach deterministycznych cechą charakterystyczną jest to, że stan procesu w każdej chwili można określić jednoznacznie. Dzięki czemu znając stan teraźniejszy jesteśmy w stanie określić jaki będzie stan przyszły. Natomiast w procesach niedeterministycznych, pomimo wiedzy na temat zachowania procesu w stanie przeszłym i teraźniejszym, nie jest możliwe jednoznacznie stwierdzenie, jaki stan przyjmie proces w przyszłości. Można jedynie z założonym prawdopodobieństwem określić przedział, w którym znajdzie się wyznaczana wartość. W procesie niedeterministycznym, zwanym również stochastycznym, ustalenie stanu przyszłego jest zmienną losową. Jeżeli w procesie niedeterministycznym wyznaczy się funkcję, dzięki której w dowolnej chwili czasu z określonym prawdopodobieństwem proces przyjmie wartości z zadanego przedziału, to zachowanie tego obserwowanego procesu stochastycznego będzie mogło być opisane modelem probabilistycznym [2, 6, 8, 19, 22, 25, 30, 31, 35, 37, 38, 41].

Dla każdego z modelu probabilistycznego da się wyznaczyć następujące parametry:

- wartość oczekiwaną  $\bar{X}$ , inaczej: średnią, przeciętną.

Jeżeli  $\Omega$  - jest przestrzenią zdarzeń losowych, tj. zbiorem zaistniałych zmiennych niezależnych. Wówczas wartość oczekiwana wyraża się wzorem:

$$\bar{X} = \int_{\Omega} x \cdot f(x) dx, \quad (8.1)$$

Wariancja procesu  $\sigma^2$  mówiąca o tym, jakie jest zróżnicowanie obserwacji w odniesieniu do średniej, wyraża się wzorem:

$$\sigma^2 = \int_{\Omega} x^2 \cdot f(x) dx, \quad (8.2)$$

Skośność [5] – jest to miara asymetrii obserwowanych wyników. Podaje informacje jak wyniki rozmieszczone są wokół wartości oczekiwanej. Współczynnik skośności przyjmuje wartość „0” w przypadku symetrii wyników. Współczynnik powyżej 0 świadczy o prawostronnej asymetrii, natomiast wynik poniżej 0 świadczy o lewostronnej asymetrii. Skośność można wyznaczyć ze wzoru:

$$SKE = \frac{n \sum (x_i - \bar{X})^3}{(n-1)(n-2)\sigma^3}, \quad (8.3)$$

gdzie:

$SKE$  - współczynnik skośności,

$n$  - liczba obserwacji,

$\bar{X}$  – średnia,

$x_i$  - wynik kolejnej obserwacji,

$\sigma$  - odchylenie standardowe.

Im skośność jest bliższa 0, tym wykres staje się symetryczny.

Współczynnik ekscesu – jest miarą spłaszczenia i koncentracji rozkładu w pobliżu średniej. Do jego wyznaczenia niezbędne okazuje się obliczenie momentu centralnego rzędu czwartego:

$$M_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^4, \quad (8.4)$$

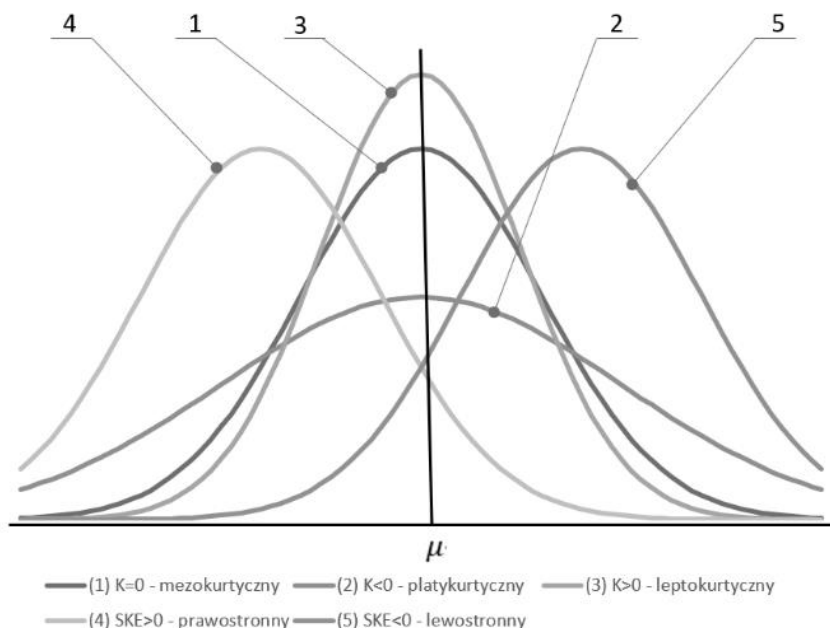
Dla tak wyznaczonego momentu centralnego rzędu czwartego można wyznaczyć współczynnik ekscesu [6, 30, 32, 38]:

$$K = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3, \quad (8.5)$$

dla:

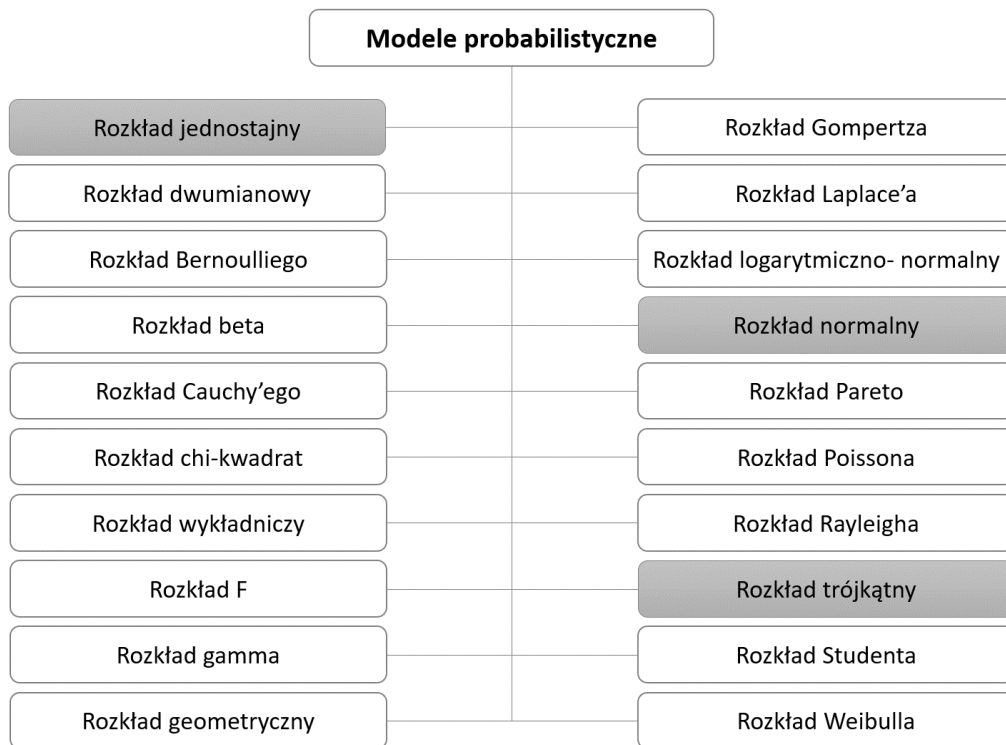
- $K=0$  rozkład jest zgodny z zakładanym tzw. rozkład mezikurtyczny,
- $K>0$  rozkład bardziej spiczasty, wysmukły tzw. rozkład leptokurtyczny,
- $K<0$  rozkład bardziej spłaszczony, wysmukły tzw. rozkład platykurtyczny.

Na (rys. 3.1) przedstawiono graficzna prezentację skośności i współczynnika ekscesu dla rozkładu normalnego.



Rys. 8.4. Prezentacja graficzna skośności oraz znaczenia współczynnika ekscesu [12]

Istnieje wiele modeli probabilistycznych określających rozkład rozważanej zmiennej. Ich różnorodność przedstawiono na rys. 8.5, na którym cieniowaniem zaznaczono wykorzystane w dalszej części rozkłady. Zastosowanie pozostałych rozkładów szczegółowo zostało omówione w następujących [13, 16, 24, 34, 39].



Rys. 8.5. Najczęściej wykorzystywane modele probabilistyczne w praktyce przemysłowej, kolorem zielonym zaznaczono wykorzystane modele [16]

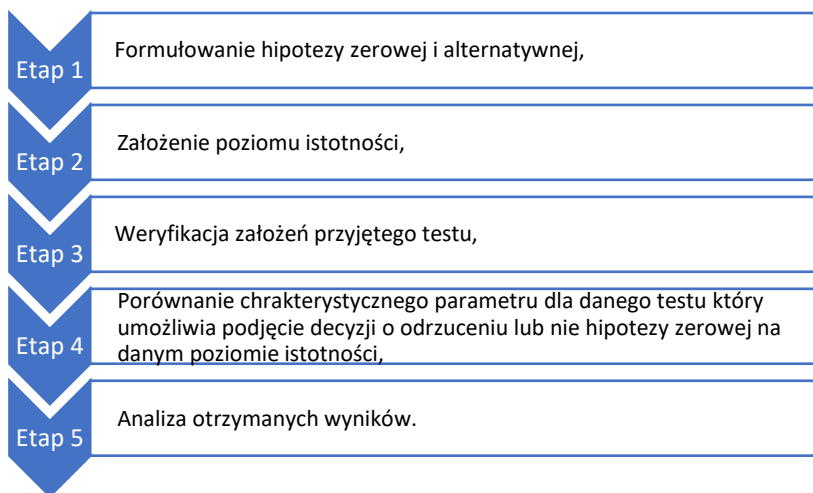
Na podstawie analizy literatury przedmiotu można stwierdzić, że do opisu czasu trwania operacji ciągnięcia, można zastosować szereg modeli statystycznych. W wyborze konkretnego modelu niezbędne jest przeprowadzenie analizy adekwatności poszczególnych modeli. W tym celu zakłada się, by założony model statystyczny w najlepszym stopniu opisywał założone zdarzenie. Nie wszystkie modele statystyczne nadają się do opisu zachodzących zjawisk. W ramach realizacji prowadzonego planu eksperymentu wybrano te modele statystyczne, które w największym stopniu opisują założone zjawisko. W ramach badań wstępnych dokonano symulacji komputerowej i założono, że najlepszym do opisu zachodzących zjawisk będą modele oparte o rozkład normalny, trójkątny oraz jednostajny. Dla przedstawionego histogramu na rys. 8.3. analizując jego kształt oraz przeprowadzając analizę z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów przyjęto następujące rozkłady statystyczne przedstawione w tabeli 8.1. wraz z ich charakterystycznymi parametrami.

Tabela 8.1. Rozkłady statystyczne wraz z charakterystycznymi parametrami przyjęte do opisu przebiegu operacji ciągnięcia [18]

Operacja	Typ rozkładu							
	Trójkątny			Normalny			Jednostajny	
Ciągnięcie prętów powyżej $\varnothing 32$	wartość oczekiwana	wariancja	a, c, b	wartość oczekiwana	wariancja	odchylenie standardowe	wartość oczekiwana	wariancja
		1900	5600	1740;1860;2100	1900	5675	75	1920

### 8.4. OCENA ADEKWATNOŚCI MODELU PROBABILISTYCZNEGO DO IDENTYFIKOWANEGO PROCESU PRODUKCYJNEGO

Założone rozkłady opisujące przebieg zmienności trwania operacji ciągnięcia tabela 8.1. wymagają oceny adekwatności. W tym wypadku należy przy pomocy testów statystycznych oszacować poprawność stawianej hipotezy zerowej. Procedurę postępowania podczas wnioskowania statystycznego przedstawia (rys. 8.6.).



Rys. 8.6. Etapy wnioskowania statystycznego [28]

#### Etap 1. Formułowanie hipotezy zerowej i alternatywnej

Wyróżnia się rodzaje postawionych hipotez [28]:

- pierwsza tzw. hipoteza zerowa – zakłada, że sprawdzany rozkład został dobrany prawidłowo,
- druga tzw. hipoteza alternatywna – zakłada, że sprawdzany rozkład został dobrany błędnie.

Do weryfikacji postawionej hipotezy stosuje się test istotności, na podstawie którego można podjąć decyzję, czy są podstawy do odrzucenia lub przyjęcia stawianej hipotezy.

Test ten zakłada możliwość popełnienia błędu pierwszego rodzaju (odrzućcie hipotezy prawdziwej), którego prawdopodobieństwo nosi nazwę poziomu istotności. Nie uwzględnia on jednak możliwości popełnienia błędu drugiego rodzaju (przyjęcie hipotezy fałszywej).

Dla każdej z wyszczególnionej operacji technologicznej podczas wytwarzania prętów mosiężnych postawiono 3 następujące hipotezy zerowe:

$H_{01}$  - „Operacja ciągnięcia przyjmuje wartości z rozkładu trójkątnego”

$H_{02}$  - „Operacja ciągnięcia przyjmuje wartości z rozkładu normalnego”

$H_{01}$  - „Operacja ciągnięcia przyjmuje wartości z rozkładu jednostajnego”

Postawiono również 3 hipotezy alternatywne:

$H_{11}$  - „Operacja ciągnięcia nie przyjmuje wartości z rozkładu trójkątnego”

$H_{12}$  - „Operacja ciągnięcia nie przyjmuje wartości z rozkładu normalnego”

$H_{13}$  - „Operacja ciągnięcia nie przyjmuje wartości z rozkładu jednostajnego”

## Etap 2. Przyjęcie poziomu istotności

Poziom istotności  $\alpha$  tj. prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju. Określa również maksymalne ryzyko błędu, jakie jesteśmy w stanie zaakceptować. Założono arbitralnie, że poziom istotności  $\alpha=0,05$ .

## Etap 3. Sprawdzenie założeń przyjętego testu

W celu zweryfikowania, czy proponowane rozkłady statystyczne odzwierciedlają charakter czasu trwania danej operacji, posłużono się testem chi-kwadrat. Na podstawie tego testu można sprawdzić, czy dana populacja posiada określony typ rozkładu. Może zostać on zastosowany dla populacji większej niż 30 obserwacji. Wyniki obserwacji dzieli się na klasy i dla każdej z nich przy założeniu jaki typ rozkładu badamy, obliczamy licznosc teoretyczną tj. ilości próbek jakie powinny się znaleźć w danej klasie  $E_j$ -ilość zdarzeń spodziewanych. Następnie wyznacza się ilość rzeczywistych próbek, które mieszczą się w danym przedziale  $O_j$ -zdarzenia obserwowane. Na podstawie tych danych wyznacza się statystykę  $\chi^2$  według wzoru [13]:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}, \quad (8.6)$$

gdzie:

$O_j$  - licznosc zdarzeń zaobserwowanych,

$E_j$  - licznosc zdarzeń przypisana dla konkretnego modelu probabilistycznego.

Weryfikacja postawionej hipotezy zerowej odbywa się przez porównanie wyliczonej statystyki  $\chi^2$  ze znanym tablicowanym rozkładem zwanym krytyczną wartością testu. Do odczytania tablicowanej wartości  $\chi^2$  niezbędna okazuje się znajomość liczby stopni swobody którą z definicji wyznaczano ze wzoru [13]:

$$s = k - 1, \quad (8.7)$$

gdzie:

$k$  - liczba kategorii, próbki dla każdej operacji zostały podzielone na 9 klas, dlatego  $k=9$ .

Poziom prawdopodobieństwa  $p$  jest to najmniejsze prawdopodobieństwo, przy którym hipoteza zerowa może zostać odrzucona. Jeżeli  $\alpha > p$ , to na danym poziomie istotności



$\alpha=0,05$  odrzucamy hipotezę zerową, natomiast gdy  $\alpha=0,05 < p$ , to na danym poziomie istotności  $\alpha$  nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Porównanie tych dwóch wartości jest podstawą przy podejmowaniu decyzji weryfikacyjnych.

**Etap 4. Porównanie  $p$  które umożliwia podjęcie decyzji o odrzuceniu lub nie hipotezy zerowej na danym poziomie istotności**

Przy opracowywaniu modeli probabilistycznych skorzystano z pomiarów wyników badań zamieszczonych na rys. 8.3. i tab. 8.1. Na ich podstawie sporządzono histogramy czasu pracy na stanowisku oraz wyznaczono charakterystyczne parametry statystyczne (tab. 8.2.): średnia, wariancja, wartości minimalnej, maksymalnej i środkowej, prawdopodobieństwo  $p$ , współczynnik  $\chi^2$ , współczynnik  $SKE$ , współczynnik  $K$ . W ramach analizowanych systemów poszczególnych stanowisk produkcyjnych wyznaczono również: funkcję gęstości prawdopodobieństwa czasu pracy na stanowisku  $f(t)$  oraz dystrybuantę czasu pracy na stanowisku  $F(t)$ .

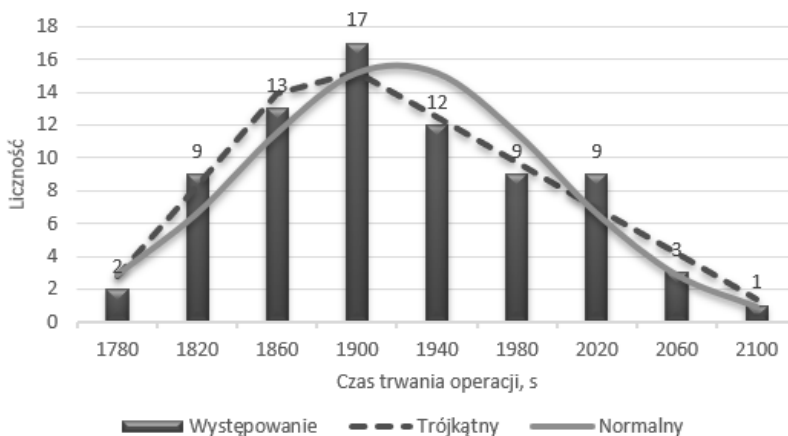
Na wspólnym wykresie, dla każdego stanowiska przedstawiono dopasowanie rozkładów teoretycznych: normalnego, trójkątnego i jednostajnego. Do weryfikacji hipotez o postaci rozkładu przyjęto poziom istotności  $\alpha=0,05$  i zastosowano test chi-kwadrat.

W tabeli 8.2. zamieszczono dopasowanie rozkładów przy pomocy testu chi-kwadrat dla stanowiska ciągnięcia oraz zamieszczono podstawowe parametry statystyczne na poziomie istotności  $\alpha=0,05$ , dla tej operacji.

Tabela 8.2. Statystyczne opracowanie wyników czasu trwania operacji ciągnięcia [18]

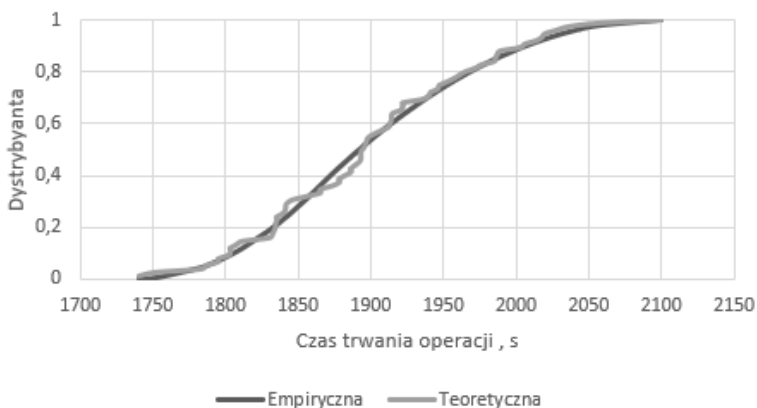
Przedział	Występowanie	Rozkład					
		trójkątny		normalny		jednostajny	
		$O_{2.1j}$	$E_{2.1j}$	$\chi^2_{2.1}$	$E_{2.1j}$	$\chi^2_{2.1}$	$E_{2.1j}$
I	2	2,8	0,22	2,9	0,29	8,3	4,81
II	9	8,3	0,05	6,6	0,83	8,3	0,05
III	13	14	0,06	12	0,19	8,3	2,61
IV	17	15	0,19	15	0,22	8,3	9,01
V	12	13	0,02	15	0,66	8,3	1,61
VI	9	9,7	0,05	12	0,55	8,3	0,05
VII	9	6,9	0,61	6,6	0,85	8,3	0,05
VIII	3	4,2	0,33	2,9	0	8,3	3,41
IX	1	1,4	0,11	1	0	8,3	6,45
$\sum \chi^2_{2.1} =$	-	-	1,64	-	3,58	-	28,08
$p_{2.1} =$	-	-	0,99	-	0,89	-	0,005
$\bar{X}_{2.1}$	$\sigma^2_{2.1}$	Mediana <sub>2.1</sub>		Min <sub>2.1</sub>	Max <sub>2.1</sub>	SKE <sub>2.1</sub>	K <sub>2.1</sub>
1899,s	5675	1895		1740	2100	0,27	-0,38

Analizując dane zawarte w tabeli 8.2. oraz ich graficzną prezentację (rys. 8.7.) można stwierdzić, że rozkład czasu trwania operacji ciągnięcia charakteryzuje się  $\bar{X}_{2,1} = 1899$ ,  $s \sigma_{2,1}^2 = 5675$  oraz prawostronną asymetrią  $SKE_{2,1} = 0,27 > 0$ . W zakresie czasu trwania tej operacji można stwierdzić również, że współczynnik ekscesu będący miarą spłaszczenia i koncentracji rozkładu w pobliżu średniej wynosi  $K_{2,1} = -0,38$ , co świadczy o spłaszczeniu wykresu, jest platykurtyczny.



Rys. 8.7. Dopasowanie rozkładu normalnego, trójkątnego oraz jednostajnego do danych empirycznych, dla czasu trwania operacji ciągnięcia [18]

Test chi-kwadrat potwierdził na poziomie istotności  $\alpha=0,05$ , zgodność empirycznego rozkładu (rys. 8.8.) czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej  $\Phi 32$  z rozkładem trójkątnym o parametrach  $\bar{X}_{2,1} = 1900, s$  i  $\sigma_{2,1} = 75$ ,  $a_{2,1}=1740$ ,  $c_{2,1}=1860$ ,  $b_{2,1}=2100$ , dla którego  $p_{2,1}=0,99$ .



Rys. 8.8. Dystrybujanta empiryczna i teoretyczna rozkładu trójkątnego czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej  $\Phi 32$  [18]

Na podstawie oszacowanych parametrów (rys. 8.7.), (rys. 8.8.) wyznaczono:

- funkcję gęstości prawdopodobieństwa czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej Ø32:

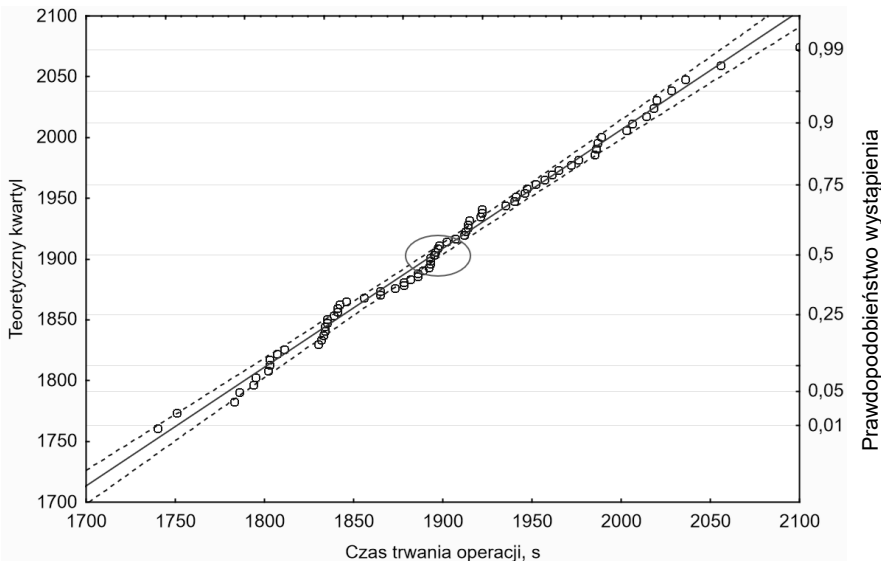
$$f_{2.1}(t) = \begin{cases} 4,63 \times 10^{-5}t - 0,08 & \text{dla } 1740 \leq t \leq 1885 \\ -2,31 \times 10^{-5}t + 0,0486 & \text{dla } 1885 < t \leq 2100, \text{ (8.8)} \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

- dystrybucję czasu pracy na stanowisku:

$$f_{2.1}(t) \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1740 \\ 2,31 \times 10^{-5}t^2 - 0,08t + 70,1 & \text{dla } 1740 \leq t \leq 1885 \\ -1,2 \times 10^{-5}t^2 + 0,0486t - 50 & \text{dla } 1885 < t \leq 2100 \\ 1 & \text{dla } 2100 < t \end{cases}, \text{ (8.9)}$$

Analizując dane przedstawione na (rys. 8.9.), można stwierdzić, że czas zakończenia operacji ciągnięcia prętów powyżej Ø32 z dużym prawdopodobieństwem wystąpienia (około 90%) będzie krótszy lub równy 2006 sekund. Aby uzyskać 50% prawdopodobieństwa wystąpienia zadanego czasu trwania tej operacji, należy założyć, że zostanie ona ukończona w czasie krótszym lub równym 1899 sekund, co jest wartością średnią z próby i tym samym potwierdza słuszność zastosowanej metody graficznej do oceny adekwatności dobranego rozkładu prawdopodobieństwa. Chcąc uzyskać optymistyczny wariant (10% pewności czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej Ø32), powinno założyć się jej trwanie na poziomie krótszym lub równym 1803 sekund. Charakter prezentowanego rozkładu wykazuje brak zakłóceń prowadzonej operacji technologicznej.

Na (rys. 8.9.) przedstawiono dopasowanie rozkładu teoretycznego do rzeczywistych danych empirycznych metodą graficzną.



Rys. 8.9. Metoda graficzna dopasowania rozkładu trójkątnego dla operacji ciągnięcia prętów powyżej Ø32 [18]

Analizując dane rozkładu czasu trwania operacji ciągnięcia prętów powyżej  $\varnothing 32$ , można stwierdzić, że dane dość dobrze „układają się” wzdłuż linii prostej. Świadczy to o poprawnie dobranym modelu probabilistycznym rozkładu trójkątnego. Charakter prezentowanego rozkładu wykazuje brak zakłóceń prowadzonej operacji technologicznej.

## 8.5. PODSUMOWANIE

Na podstawie przeprowadzonej identyfikacji technologicznej oraz wyznaczonych modeli probabilistycznych można stwierdzić, że wykorzystane modele oparte o analizę statystyczną umożliwiły identyfikację możliwych do wystąpienia czasów trwania operacji technologicznej ciągnięcia. Z uwagi na rodzaj i charakter prowadzonego procesu technologicznego najbardziej zbliżonym do opisu rzeczywistych warunków eksploatacyjnych jest model probabilistyczny oparty o rozkład trójkątny. Przedstawiony w pracy tok postępowania oraz wyznaczony model probabilistyczny powtórzony dla wszystkich operacji technologicznych wchodzących w skład procesu technologicznego wytwarzania prętów. Umożliwiają określenie danych eksperymentalnych czasów trwania danej operacji technologicznej wytwarzania prętów, uwzględniające aspekty fizyczne procesów wytwarzania. Implementacja wyznaczonych modeli probabilistycznych w symulacji komputerowej przyczyni się do wytypowania wąskiego gardła na linii technologicznej wytwarzania prętów.

## Literatura

- [1] ACZEL AMIR D.: *Statystyka w zarządzaniu*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 2005, s. 539-730
- [2] BAZANT Z.P., NOVAK D.: *Probabilistic nonlocal theory for quasibrittle fracture initiation and size effect. I theory*. Journal of Engineering Mechanics, 126(2)/2000, s. 166-174
- [3] BENJAMIN J.R., CORNELL C.A.: *Rachunek prawdopodobieństwa statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1977, s. 45-96
- [4] BRZEZIŃSKI M.: *Organizacja produkcji w przedsiębiorstwie*. Wydawnictwo Difin, 2013, s. 154-175
- [5] BUKOWSKI L., KARKULA M.: *The simulation of logistic processes using DOSIMIS-3 simulator*. [w:] Finanční a logistické řízení v kontextu vstupu České republiky do Evropské unie: sborník referátů z mezinárodní konference: Srdce Beskyd., díl / VŠB, Technická Univerzita, Ostrava, 2003, s. 296-300
- [6] CZUPRYNA-NOWAK A.: *Metody statystyczne i optymalizacja w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2011, s. 126-143
- [7] DĄBROWSKI A.: *Wybrane aspekty organizacji pracy z wykorzystaniem maszyn ręcznych*. Czasopismo Bezpieczeństwo Pracy nauka i praktyka s.18-22 Nr 551/2017
- [8] DELAHAY T., PALIN-LIC T.: *Estimation of the fatigue strength distribution in high-cycle multiaxial fatigue taking into account the stress-strain gradient effect*. Int. J. Fatigue, 28/2006 s. 474-484
- [9] GIERULSKI W., LUŚCIŃSKI S., SERAFIN R.: *Probabilistyczne miary oceny dostawców w łańcuchu logistycznym produkcji masowej*. Czasopismo Logistyka nr 4, s. 3363-3373, 2015.

- [10] GOLA A., RELICH M., KŁOSOWSKI G., ŚWIĆ A.: *Mathematical models for manufacturing systems capacity planning and expansion - an overview*. Applied Mechanics and Materials, 791/2015, s. 125–131
- [11] GRABSKI F.: *Stochastyczny model bezpieczeństwa obiektu w procesie eksploatacji*. Problemy Eksploatacji, 1/2011, s. 89-102
- [12] GRZEGORZEWSKI P., BOBECKA K., DEMBIŃSKA A., PUSZ J.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*. WSISiZ, Warszawa 2008
- [13] HEJMANOWSKA B.: *Zastosowanie rozkładu Laplace'a do określania niepewności danych przestrzennych na przykładzie NMT i systemu IACS*. Wydawnictwo AGH w Krakowie 2013
- [14] JANISZ K., SZCZUREK I.: *Symulacja wydajności procesu produkcyjnego: studium przypadku*. Autobusy, 12/2018, s. 896-902
- [15] JOHN R. STRANGFELD: *Leading Through Connections*. CEO C-suite Studies 2012, s.6-17
- [16] KACZMARZYK J., KANIA P.: *Teoretyczne rozkłady prawdopodobieństwa w pomiarze strat eksperymentalnych na działalności inwestycyjnej przedsiębiorstwa*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach 2016
- [17] KAMIŃSKI P., DROBINA R.: *Redukcja czasu przebrojenia w wybranym przedsiębiorstwie produkcyjnym*. Wydawnictwo ATH, Technologie, procesy i systemy produkcyjne, 3/2018, s. 127-138
- [18] KAMIŃSKI P.: *PhD thesis, Technological identification of brass rod production based on simulation and proba-bilistic models*. 2022
- [19] KARKULA M.: *Podejście procesowe w organizacjach*. Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, 2009, s.287-296
- [20] KNOP K.: *Analiza problemów w systemie zarządzania produkcją w wybranym przedsiębiorstwie*. Zeszyty Naukowe Quality Production Improvement, 9/2018, s. 125-135
- [21] KOTULSKI Z.: *Generatory liczb losowych: Algorytmy, Testowanie, Zastosowania*. Warszawa Matematyka Stosowana, 2001, s. 32-66
- [22] KRĘŻOLEK D.: *Wpływ asymetrii rozkładu na estymację kwantylowych miar ryzyka*. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach Nr 344, 2017
- [23] KRUPA K.: *Modelowanie, symulacja i prognozowanie. Systemy ciągłe*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 2016, s. 43-64
- [24] KUSY M.: *Analiza rozkładów i symulacje w programie STATISTICA*. StartSoft Polska, 2011
- [25] PEIRCE F.Th.: *Tensile test for cotton yarns, the weakest link theorems on the strength of long and of composite specimens*. J. Tex. Ist., 17/1926,s. 355-368
- [26] PODOSEK Z.: *Projektowanie procesów produkcyjnych*. Prace Naukowe WSZoP 49/2020, s. 123-148
- [27] ROLSKI T.: *Symulacje stochastyczne i teoria Monte Carlo*. Instytut Matematyczny Politechniki Wrocławskiej, 2017, s.4-25
- [28] SALWIN M., KRYSOSIAK K.: *Zastosowanie narzędzi inżynierii jakości w procesie wytwarzania tworzyw sztucznych*. Czasopismo Przedsiębiorczość i Zarządzanie s. 213-228,19/2018
- [29] SŁOWIAŃSKI B.: *Podstawy sprawnego działania*. Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, 2008, s. 83-95
- [30] STANISZ A.: *Accessible Course in the Statistics Using STATISTICA Program on Examples Taken from Medicine*. vol. I, Ed. Statsoft, Cracow 2007
- [31] STANISZ A.: *Accessible Course in the Statistics with Using the STATISTICA Program on Examples Taken from Medicine*, vol. II, Statsoft, Cracow 2007

- [32] STATSOFT: *Elektroniczny Podręcznik Statystyki PL*. Kraków, WEB: <http://www.statsoft.pl/textbook/stathome.html>, 3.08.2023
- [33] SULEWSKI P.: *Porównanie generatorów liczb pseudolosowych*. Wiadomości Statystyczne, 64/2019, s. 5-31
- [34] SUWADA K.: *Dopasowanie rozkładów i eksperymenty symulacyjne na przykładzie danych o wypadkach drogowych*. StartSoft Polska 2009
- [35] TIPPET L., H. C.: *On the extreme individuals and the range of sample taken from a normal population*. *Biometrika*. 17/1925, s. 364
- [36] TOPOLSKI M.: *Model sterowania przepływem materiałów w procesie produkcyjnym*. *Autobusy* 6/2018 s.1141-1144
- [37] WAGNER D.: *Zasady skutecznego planowania i przeprowadzania eksperymentu*. Wydawnictwo Naukowe Scholar Sp. z o.o., 2013, s. 81-99
- [38] WARSZA Z. L., KORCZYŃSKI M. J.: *Statystyki skośności i kurtozy małych próbek pomiarowych z populacji o rozkładzie normalnym i kilku innych*. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 12/2014, s.1119-1123
- [39] WASILEWSKA E.: *Statystyka matematyczna w praktyce*. Wydawnictwo Difin, 2015
- [40] WAWAK S.: *Zarządzanie jakością. Podstawy, systemy i narzędzia*. Wydawnictwo Onepress, 2011
- [41] ZAREMBA W.: *Minimalna liczebność próby losowej w badaniach reprezentacyjnych*. *Współczesne Zarządzanie* 2/2004, s. 57-64
- [42] ZELIAŚ A.: *Metody statystyczne*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, 2000, s. 21-46

## DETERMINING A PROBABILISTIC MODEL OF THE DURATION OF THE BRASS ROD DRAWING TECHNOLOGICAL OPERATION ON THE EXAMPLE OF THE METALLURGICAL INDUSTRY

### Abstract

*The article was created in cooperation with "Walcownia Metali Dziedzice S.A. and based on an analysis of the actual state of the company. The subject of the analysis is the bar drawing process, which is a bottleneck in the technological process of bar production. A probabilistic model was developed, thanks to which there was a more complete illustration of the phenomena taking place, as well as the time characteristics of the analyzed process.*